INPT

Institut National des Postes et Télécommunications

Concours d'Accès en Première Année du Cycle d'Ingénieurs d'État
2012

Épreuve de Mathématiques

Durée : 2 Heures

Avertissement : *Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les autres.*

Exercice 1

Pour tout x réel dans l'intervalle ouvert $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$. La dérivée d'ordre n de f en x est notée $f^{(n)}(x)$, avec la convention $f^{(0)}(x) = f(x)$.

1°) **(a)** Prouver l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n tel que : $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{(\cos(x))^{n+1}}$.

(b) Donner une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'.

(c) Préciser P_0, P_1 et P_2.

(d) Déterminer le monôme de plus haut degré de P_n.

(e) Examiner la parité du polynôme P_n.

2°) **(a)** Montrer que les coefficients du polynôme P_n sont des entiers positifs ou nuls.

(b) Que vaut $P_n(1)$?

3°) On pose $a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $R_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Pour tout $x \in I$, justifier la formule :

$$f(x) = S_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(x(1-u))\,du.$$

4°) Prouver que pour tous $0 \le x < y < \frac{\pi}{2}$:

$$\text{(a)} \quad 0 \le R_n(x) \le \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y).$$

$$\text{(b)} \quad 0 \le R_n(x) \le \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} f(y).$$

5°) En déduire que, pour tout $x \in I$, on a : $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$.

Exercice 2

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et A la matrice associée à f relativement à la base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1°) Déterminer le rang, le noyau et l'image de f

2°) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f - id)^2$ où id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^4$.

3°) Montrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

4°) Montrer qu'il existe une base $B' = (e_1', e_2', e_3', e_4')$ de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est égale à

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on choisira les vecteurs e_1', e_2', e_3' et e_4' de manière à ce que leurs coordonnées dans la base canonique soient uniquement des éléments de $\{-1, 0, 1\}$.

5°) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base B', calculer P^{-1}.

6°) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T^n et en déduire A^n.