

INSTITUT SUPERIEUR DES PECHES MARITIMES
CONCOURS D'ACCES (JUILLET 2010)
EPRUVE DE MATHÉMATIQUES
DUREE : 02 heures

EXERCICE 1. Calculer les intégrales suivantes :

Question 1. $\int_1^{e^2} \frac{x+1}{x} \log x \, dx$

Question 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x} \, dx$

EXERCICE 2. Calculer les primitives suivantes :

Question 3. $\int e^{\sin x} \cos^5 x \, dx$

Question 4. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \, dx$

EXERCICE 3.

On se propose de résoudre l'équation (E) sur le corps des complexes :

$$(E) \quad 4z^3 + 2(i - 4)z^2 + 3(3 - 2i)z - 9 + \frac{9}{2}i = 0$$

Question 5. Sachant que (E) possède une racine réelle a, déterminer celle-ci.

Question 6. Déterminer les solutions z' et z'' du l'équation du second degré en z

$$4z^2 - 2(1 - i)z + 6 - 3i = 0$$

Question 7. Montrer que les solutions de (E) sont : a, z', z''.

Question 8. Les affixes des points A, M' et M'' étant respectivement : a, z' et z''. Montrer que le triangle AM'M'' est rectangle.

EXERCICE 4.

Soit $I_n = \int_0^{\pi} t g^n x \quad n \in \mathbb{N}$

Question 9. Trouver une relation de récurrence I_n et I_{n+2} (calcul de I_n et I_{n+2})

Question 10. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (I_n)$

Question 11. Calculer à 0,001 près par défaut I_8 ($\pi = 3,141592\dots$)

EXERCICE 5.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty]$ par : $f(x) = 5 \frac{\ln x}{x} + 3$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.

Question 12. Déterminer la limite de f en 0 ; en donner une interprétation graphique.

Question 13. Déterminer la limite de f en $+\infty$; en donner une interprétation graphique.

Question 14. Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f , puis étudier son signe.

Question 15. En déduire le tableau de variation de la fonction f . On y indiquera les limites aux bornes de l'intervalle de définition de f ainsi que la valeur exacte de $f(e)$.

Question 16. Déterminer une primitive de f sur $[0; +\infty[$.

On pourra remarquer que $f(x) = 5u'(x) \times u(x) + 3$ avec $u(x)$ à préciser.

Question 17. En déduire la valeur exacte de $I = \int_2^4 f(t) dt$ sous la forme $a(\ln 2)^2 + b$ avec a et b deux réels à déterminer.

Question 18. Préciser le signe de f sur l'intervalle $[2; 4]$.

Question 19. Donner une interprétation graphique de I .

Question 20. On admet que le bénéfice, en milliers de dirhams, que réalise une entreprise lorsqu'elle fabrique x milliers de pièces est égal à $f(x)$.

En utilisant les résultats précédents, déterminer la valeur moyenne du bénéfice lorsque la production varie entre 2 000 et 4 000 pièces. On donnera une valeur approchée de ce bénéfice à 100 dirhams près.