

Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Expérimentales et Techniques

Epreuve de Mathématiques

Mardi 22/07/08 - Durée : 3h 03mn

- N.B.** * La rédaction peut être en français ou en arabe
* La rigueur du raisonnement, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

|| Exercice I , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts) ||

Q1.1 Calculer $(1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q)$

Q1.2 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

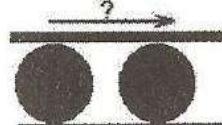
$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \left(\left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right)$$

Etudier la parité de la fonction f

Q1.3 Soit $x \in \mathbb{R}$, on note (E) : $e^{2x} - 2me^x + 1 = 0$. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) n'admet pas de racine réelle

Q1.4 Soit $u_n = \int_1^2 \frac{(\ln t)^n}{t} dt$, avec $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est-elle monotone ?

Q1.5 Une planche est posée sur deux rondins de bois de 31,83 cm de haut. De combien aura avancé la planche quand les rondins auront fait un tour ?



|| Exercice II , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts) ||

Q2.1 Démontrer que : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^{+3} / a^2 - c^2 = b$ on a $\sqrt{a + \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}$

Q2.2 On considère la fonction $f : x \mapsto x^3$, montrer que

$$\forall x \in [-2, 3], \forall y \in [-2, 3] \text{ on a } |f(x) - f(y)| \leq 27|x - y|$$

Q2.3 Etudier la limite quand x tend vers 1 de la fonction $f : x \mapsto x + E(x)$ ($E(x)$ désignant la partie entière de x)

Q2.4 Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $\sqrt{2(x+1)} > x$

Q2.5 On définit une suite par la donnée de la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n - 802 = 0$ et par son premier terme $u_0 = 2$. Calculer u_{19}

Les réponses doivent figurer sur cette feuille de l'épreuve

Exercice III : QCM , Barème : 14Pts

Attention : Afin de pénaliser les réponses basées sur le hasard, l'exercice est noté en entier de la manière suivante : Notons par n et m respectivement le nombre de réponses justes et fausses. La note attribuée à l'exercice sera :

$n + 2$	si $n \geq 10$
n	si $m < 5$
0	si $m \geq 5$

“ La vie est complexe car nous avons tous une partie réelle et une partie imaginaire ”

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V ou F
Q3.01 : $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.02 : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.03 : Sept cars (identiques) pleins aux deux tiers partent de Meknès à Fès, un quart des touristes descend de chaque car. Les trois quarts des touristes restants sont rassemblés dans trois cars.	
Q3.04 : Le produit de deux fonctions négatives décroissantes est une fonction croissante	
Q3.05 : Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $]a, +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	
Q3.06 : Une fonction ni continue ni monotone peut être bijective	
Q3.07 : Soient les fonctions $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{x+1}{x-1}$, on note par $\mathcal{D}_{u \circ v}$ et $\mathcal{D}_{v \circ u}$ les ensembles de définition respectifs de $u \circ v$ et $v \circ u$. On a $\mathcal{D}_{u \circ v} = \mathcal{D}_{v \circ u}$	
Q3.08 : On note F l'ensemble des applications f continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant	
$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$	
La fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient F	
Q3.09 : La fonction $f : x \mapsto x - 1 + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ si $x \neq 1$ et telle que $f(1) = 1$ admet une tangente en tout point de \mathbb{R}	
Q3.10 : On considère $I_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} dx$ et $I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$, on a $I_1 = I_2$	
Q3.11 : L'équation $10x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$	
Q3.12 : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -(x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$	

|| Exercice IV : Questions à réponse précise, Barème : 12Pts ||

Répondre dans la colonne réponse		
Barème	Question	Réponse
2Pts	<p><u>Q4.01</u> : Citer parmi les propositions A, B, C et D celles qui sont équivalentes ?</p> $\left\{ \begin{array}{l} A : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R \\ B : (P \text{ et } Q) \Rightarrow R \\ C : P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \\ D : (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R) \end{array} \right.$	
1Pt	<p><u>Q4.02</u> : Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ et soit la fonction $F : x \mapsto f(\sin t)$ définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Déterminer la dérivée seconde de F.</p>	
1Pt	<p><u>Q4.03</u> : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$</p>	
2Pts	<p><u>Q4.04</u> : On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.</p> <p>a) Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.</p> <p>b) Soient $A = \{a, b, d, f\}$ un des sous ensembles de E, calculer le nombre d'applications de E dans A.</p>	
0Pt	<p><u>Q4.05</u> : Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :</p> $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - (x-1) \ln(x-1)$ <p>Calculer $g'(x)$</p>	
1Pt	<p><u>Q4.06</u> : Calculer l'intégrale $\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$</p>	
2Pts	<p><u>Q4.07</u> : Déterminer l'ensemble $f(I)$ dans les cas suivants :</p> <p>a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ et $I =]0, 1[$</p> <p>b) $f(x) = \sin x$ et $I =]0, \pi]$</p>	
1Pt	<p><u>Q4.08</u> : Soit A le point de coordonnées $(1, -2)$ et \mathcal{D} la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$. Calculer la distance de A à \mathcal{D}.</p>	
1Pt	<p><u>Q4.09</u> : Calculer la partie réelle et imaginaire du complexe $(1 + i\sqrt{3})^9$</p>	
1Pt	<p><u>Q4.10</u> : Au fond d'un puits de $12\ m$ se trouve un escargot. Pendant la journée, il grimpe de $3\ m$. Mais chaque nuit, il glisse de $2\ m$. Il commence son ascension le 1er juin à 8 heures. Quel jour et quelle heure sortira-t-il du puits ?</p>	