

Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse ou une réponse fausse = 0pt

	Questions	Réponses	Notes
Q1 2pt	Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_n = \sum_{k=1}^n e^{\left(\frac{k}{n^2}\right)} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$\lim_n u_n =$	
Q2 2pt	Résoudre, dans $[0, 2\pi]^2$, le système: $\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$	$S =$	
Q3 2pt	Déterminer la forme algébrique de: $z = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^{42}$	$z =$	
Q4 2pt	Déterminer, Γ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes z vérifient: $(iz + 1)(z + i - 1) \in i\mathbb{R}$	Γ est	
Q5 2pt	Soit $a \in]0, n[$. Calculer $D = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$	$D =$	
Q6 2pt	Calculer: $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	$A_n =$	
Q7 2pt	Soit f une fonction positive sur son domaine de définition et dérivable en $a > 0$. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$	$\ell =$	
Q8 2pt	Calculer la limite $\delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{x \sin(\sin x)}$	$\delta =$	
Q9 2pt	Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$	$f(x) =$	
Q10 2pt	Soit g la fonction définie par $\forall x \in]0, \pi[\quad g(x) = \cos x \sqrt{1 - \cos x}$ Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$, $\forall x \in]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$	$g'(x) = \dots$	
Q11 2pt	Soit h définie sur \mathbb{R}_+^* par $h(x) = \ln e^x - e^{2x} $ Déterminer h^{-1} .	$\forall x \in D_{h^{-1}} = \dots$ $h^{-1}(x) = \dots$	
Q12 2pt	Calculer: $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$	$I =$	
Q13 2pt	Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$	$J =$	
Q14 2pt	Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(t) dt = 0, y'(\pi) = \frac{6}{37}$	$y(x) =$	
Q15 2pt	Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $3^x + 4^x = 5^x$	$S =$	

II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.

Q16: Pour quelles valeurs de m le système $\begin{cases} -X - Y - 2mZ = 1 \\ X + (1-m)Y + Z = 2 \\ 2X + 3Y + mZ = 3 \end{cases}$ admet une solution unique?

- | | | | |
|-------------------------|---------------|-------------------------|---------------------|
| A | B | C | D |
| -1 et un nombre négatif | uniquement -1 | -1 et un nombre positif | -1 et $\frac{1}{2}$ |

Q17: Sur $[0, +\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = |x| + \ln(x+1)$ est:

- | | | | |
|-------------------|-------------------|------------------------|------------------------|
| A | B | C | D |
| toujours positive | toujours négative | négative puis positive | positive puis négative |

Q18: Soit f définie par $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(e) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{14 \ln x}{x-1-\ln x}}$. Alors sa courbe C_f admet:

- | | | | |
|------------------------------------|---------------------------------------|---|----------------------------|
| A | B | C | D |
| une asymptote oblique en $+\infty$ | en $x = e$ une demi tangente à gauche | en $x = e$ une demi tangente à droite verticale | aucunes des trois réponses |

Q19: Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom "SMARA" dans un ordre quelconque?

- | | | | |
|------------------|-------------------|------------------|----------------------------|
| A | B | C | D |
| $\frac{1}{6006}$ | $\frac{10}{1001}$ | $\frac{50}{145}$ | aucunes des trois réponses |

Q20: Une boîte B_1 contient 2 jetons numérotés: 1, 3. Une boîte B_2 contient 2 jetons numérotés: 2, 2. Une boîte B_3 contient 2 jetons numérotés: 1, 0. On tire au hasard un jeton a de B_1 , un jeton b de B_2 , un jeton c de B_3 . Quelle est la probabilité pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles?

- | | | | |
|-----|------|------|---|
| A | B | C | D |
| 0,5 | 0,25 | 0,75 | 1 |

Q21: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-1, 1, 1)$ et $B(7, -5, 5)$. Soit S la sphère dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$. Le plan tangent à S au point $C(1, 1, -1)$ est:

- | | | | |
|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| A | B | C | D |
| $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ | $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ | $2x + 2y - z - 5 = 0$ | $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ |

Q22: Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \int_n^{n+1} e^{\left(\frac{x}{n}\right)} dx$. Alors

- | | | | |
|--|--|--|--|
| A | B | C | D |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ |

Q23: Sur \mathbb{R}^+ , La fonction $f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)$ admet :

- | | | | |
|------------------|----------------------|------------------|----------------------|
| A | B | C | D |
| Un maximum local | Deux maximums locaux | Un minimum local | Deux minimums locaux |

Q24: Combien l'équation $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$ possède-t-elle de solutions dans $[0, \frac{2\pi}{3}]$?

- | | | | |
|----------------|---------------|----------------|-------------------------|
| A | B | C | D |
| Cinq solutions | Six solutions | Sept solutions | Plus que sept solutions |

Q25:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right) =$$

- | | | | |
|---|---|-----------|---------------------------|
| A | B | C | D |
| 0 | 1 | $+\infty$ | cette limite n'existe pas |

Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

1 - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse ou une réponse fausse = 0pt

	Questions	Réponses	Notes
Q1 2pt	Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_n = \sum_{k=1}^n e^{\left(\frac{k}{n^2}\right)} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$\lim_n u_n =$	
Q2 2pt	Résoudre, dans $[0, 2\pi]^2$, le système: $\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$	$S = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ et } S = \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	
Q3 2pt	Déterminer la forme algébrique de: $z = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^{42}$	$z = 1$	
Q4 2pt	Déterminer, Γ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes z vérifient: $(iz + 1)(z + i - 1) \in i\mathbb{R}$	Γ est \dots	
Q5 2pt	Soit $a \in]0, \pi[$. Calculer $D = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$	$D = \frac{\sin a}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$	
Q6 2pt	Calculer: $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	$A_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$	
Q7 2pt	Soit f une fonction positive sur son domaine de définition et dérivable en $a > 0$. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{\ln x - \ln a}}$	$\ell = \frac{1}{2}$	
Q8 2pt	Calculer la limite $\delta = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right)}{x \sin(\sin x)}$	$\delta = \frac{1}{12}$	
Q9 2pt	Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que: $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$	$f(x) =$	
Q10 2pt	Soit g la fonction définie par $\forall x \in]0, \pi[\quad g(x) = \cos x \sqrt{1 - \cos x}$	$g'(x) = \dots$	
Q11 2pt	Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$, $\forall x \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$		
Q12 2pt	Soit h définie sur \mathbb{R}^+ par $h(x) = \ln[e^x - e^{2x}]$ Déterminer h^{-1} .	$\forall x \in D_{h^{-1}} = \dots$ $h^{-1}(x) = \dots$	
Q13 2pt	Calculer: $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{x^3 \ln x}{(1+x^2)^2} dx$	$I =$	
Q14 2pt	Calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$	$J =$	
Q15 2pt	Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(t) dt = 0, y'(\pi) = \frac{6}{37}$	$y(x) = (K_2 \cos 3x + K_2 \sin 3x)e^{-x}$ $+ \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{36} \cos 3x$	
Q16 2pt	Résoudre, dans \mathbb{R} , l'équation $3^x + 4^x = 5^x$	$S = \dots$	

II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.

Q16: Pour quelles valeurs de m le système $\begin{cases} -X - Y - 2mZ = 1 \\ X + (1-m)Y + Z = 2 \\ 2X + 3Y + mZ = 3 \end{cases}$ admet une solution unique?

- | | | | | | | | |
|---|-------------------------|---|---------------|---|-------------------------|---|---------------------|
| A | -1 et un nombre négatif | B | uniquement -1 | C | -1 et un nombre positif | D | -1 et $\frac{1}{2}$ |
|---|-------------------------|---|---------------|---|-------------------------|---|---------------------|

Notes

Q17: Sur $[0, +\infty]$, la fonction f définie par $f(x) = |x| + \ln(x+1)$ est:

- | | | | | | | | |
|---|-------------------|---|-------------------|---|------------------------|---|------------------------|
| A | toujours positive | B | toujours négative | C | négative puis positive | D | positive puis négative |
|---|-------------------|---|-------------------|---|------------------------|---|------------------------|

Q18: Soit f définie par $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(e) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{1+\ln x}{1-\ln x}}$. Alors sa courbe C_f admet:

- | | | | | | | | |
|---|------------------------------------|---|---------------------------------------|---|---|---|----------------------------|
| A | une asymptote oblique en $+\infty$ | B | en $x = e$ une demi tangente à gauche | C | en $x = e$ une demi tangente à droite verticale | D | aucunes des trois réponses |
|---|------------------------------------|---|---------------------------------------|---|---|---|----------------------------|

Q19: Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom "SMARA" dans un ordre quelconque?

- | | | | | | | | |
|---|------------------|---|-------------------|---|------------------|---|----------------------------|
| A | $\frac{1}{6006}$ | B | $\frac{10}{1001}$ | C | $\frac{50}{145}$ | D | aucunes des trois réponses |
|---|------------------|---|-------------------|---|------------------|---|----------------------------|

Q20: Une boîte B_1 contient 2 jetons numérotés: 1, 3. Une boîte B_2 contient 2 jetons numérotés: 2, 2. Une boîte B_3 contient 2 jetons numérotés: 1, 0. On tire au hasard un jeton a de B_1 , un jeton b de B_2 , un jeton c de B_3 . Quelle est la probabilité pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles?

- | | | | | | | | |
|---|-----|---|------|---|------|---|---|
| A | 0,5 | B | 0,25 | C | 0,75 | D | 1 |
|---|-----|---|------|---|------|---|---|

Q21: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-1, 1, 1)$ et $B(7, -5, 5)$. Soit S la sphère dont l'un des diamètres est le segment $[AB]$. Le plan tangent à S au point $C(1, 1, -1)$ est:

- | | | | | | | | |
|---|------------------------|---|------------------------|---|-----------------------|---|------------------------|
| A | $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ | B | $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ | C | $2x + 2y - z - 5 = 0$ | D | $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ |
|---|------------------------|---|------------------------|---|-----------------------|---|------------------------|

Q22: Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \int_n^{n+1} e^{\left(\frac{x}{n}\right)} dx$. Alors

- | | | | | | | | |
|---|--|---|--|---|--|---|--|
| A | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ | B | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ | C | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ | D | $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ |
|---|--|---|--|---|--|---|--|

Q23: Sur \mathbb{R}^* , La fonction $f(x) = \ln\left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right)$ admet:

- | | | | | | | | |
|---|------------------|---|----------------------|---|------------------|---|----------------------|
| A | Un maximum local | B | Deux maximums locaux | C | Un minimum local | D | Deux minimums locaux |
|---|------------------|---|----------------------|---|------------------|---|----------------------|

Q24: Combien l'équation $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$ possède-t-elle de solutions dans $[0, \frac{2\pi}{3}]$?

- | | | | | | | | |
|---|----------------|---|---------------|---|----------------|---|-------------------------|
| A | Cinq solutions | B | Six solutions | C | Sept solutions | D | Plus que sept solutions |
|---|----------------|---|---------------|---|----------------|---|-------------------------|

Q25:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right) =$$

- | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|-----------|---|---------------------------|
| A | 0 | B | 1 | C | $+\infty$ | D | cette limite n'existe pas |
|---|---|---|---|---|-----------|---|---------------------------|