

5. Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est un irrationnel. (3Pts)

6. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1}v_n} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. (3Pts)

7. On considère trois ensembles A , B et C . Montrer que (3Pts)

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Rightarrow B \subset C$$
This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There is no handwriting or other markings on the paper.

8. Soit f une fonction strictement monotone, dérivable et à dérivée continue sur $[a, b]$. Montrer que (3Pts)

$$\int_a^b f(x) dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x) dx$$

This image shows a single sheet of white paper with horizontal blue or grey ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are approximately 20 lines visible. The paper has a slightly textured appearance and some minor discoloration or faint smudges, particularly towards the bottom edge. The overall tone is light and clean.

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne réponse	
Question	Réponse
Définir à l'aide d'une valeur absolue les encadrements suivants : $x \in [-3, 5]$ et $x \in [2, 7]$ (2Pts)	
On considère la fonction $f(x) = \min(x^2, 3)$, donner $f(\mathbb{R})$, $f([-1, 1])$ et $f^{-1}([-1, 4])$ (3Pts)	
Soit $x \in [-2, 1]$ et $y \in [2, 3]$, donner des encadrements des quantités suivantes : $x - y$, $-2x + y$ et xy (3Pts)	
Déterminer la valeur de $A = E(x) + E(-x)$ avec $E(\cdot)$ est la partie entière (2Pts)	
A l'aide des quantificateurs, écrire les propositions suivantes et préciser celles qui sont vraies: (a) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres. (2Pts) (b) Il existe un entier multiple de tous les autres. (2Pts) (c) Certains réels sont supérieurs à leurs carrés. (2Pts)	
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) $(\forall x \in \mathbb{R}, x < 0) \implies (\sqrt{x^2} = -x)$. (1Pt) (b) $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^* z = xy$. (1Pt) (c) $\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $\frac{1+nx}{\ln(nx)} \in \mathbb{R}$. (1Pt)	
$f(x) = \frac{x}{1+ x }$ avec $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. Déterminer f^{-1} . (2Pts)	

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne réponse	
Question	Réponse
Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$, on a $\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$ (2Pts)	
Calculer la dérivée de (2Pts) $g(x) = \sin \left(\ln \left(\frac{\exp(2x) + 1}{\exp(2x) + 3} \right) \right)$	
On considère la fonction f définie par $f(x) = -x + 7 + 6 \ln(2x + 1) - 6 \ln(2x + 2).$ sur $\left] \frac{-1}{2}, +\infty \right[$, étudier la position de la courbe (C_f) de f par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = -x + 7$ (1Pt)	
Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$. On définit g sur $[0, 1]$ par $g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ Quelles hypothèses faut-il rajouter pour que g soit dérivable sur $[0, 1]$? (2Pts)	
Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$. (2Pts)	
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$. (2Pts)	
Soit p et q deux réels non nuls, on considère l'équation $x^2 + px + q = 0$ (*). Trouver les valeurs de p et q pour lesquelles p et q sont solutions de l'équation (*). (2Pts)	
Eliminer 13 chiffres sur 21 de telle sorte que la somme des 8 chiffres restant soit égale à 41 3 3 3 3 3 3 3 4 4 4 4 4 4 4 8 8 8 8 8 8 8 (2Pts)	