

Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

|| Questions à réponse précise, Partie I ||

Répondre dans la colonne Réponses		(NB : Chaque question est notée sur (1Pt))
Questions	Réponses	
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?		
(a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective		
(b) $\forall x > 1, \frac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$		
(c) Soit A , B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$		
(d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \implies x < 0$		
(e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel		
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :		
(a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$		
(b) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E		
(c) La fonction h , définie sur \mathbb{R} , atteint toutes les valeurs de \mathbb{N}		
(d) Tout réel possède une racine carré dans \mathbb{R}		
(e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe		

|| Questions à réponse précise, Partie II ||

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(x^2) = (x^2 + 1) P(x)$	
Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $198x + 216y = 36$	
E, F et G étant trois ensembles finis exprimer $\text{card}(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles $E, F, G, E \cap F, E \cap G, F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	
Exprimer à l'aide d'intervalles de \mathbb{R} l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 4\}$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples +, -, * et /	
Calculer le nombre complexe $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$	
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^n (2k + 7)$	
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées : $A(2, 4), B(-2, 1)$ et $C(4, 3)$. On note d la distance du point A à la droite (BC) . Donner la valeur de d .	
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}},$ $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$	

|| Questions à réponse précise, Partie III ||

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))

Questions	Réponses
<p>Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$ vérifiant l'équation :</p> $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	
<p>Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $E(x) = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de x</p>	
<p>Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}$</p>	
<p>Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$</p>	
<p>Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x \ln x+1$</p>	
<p>On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$</p>	
<p>Soit la fonction f définie sur $I = [0, 3]$ par</p> $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0, 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2, 3] \end{cases}$	
<p>Calculer $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ avec $x \in I$</p>	
<p>Calculer $\int t^3 \cos t^2 dt$</p>	
<p>Déterminer la fonction f telle que $gof(x) = 2 x$ sachant que g est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$</p>	
<p>Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$?</p>	

Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses	(NB : Chaque question est notée sur (1Pt))
<p>Questions</p> <p>Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?</p> <p>(a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective</p> <p>(b) $\forall x > 1, \frac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$</p> <p>(c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$</p> <p>(d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \implies x < 0$</p> <p>(e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel</p>	<p>Réponses</p> <p>a) <i>fausse. exp: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective mais pas bijective, 0 n'a pas d'antécédant dans \mathbb{R}.</i></p> <p>b) <i>fausse. $D_{x-1} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} [1, 2[m]$</i></p> <p>c) <i>fausse. $A=B=\mathbb{R}$, $C=\mathbb{R}^+$ $(A \cup B) \cap C = \mathbb{R}^+ \quad A \cup (B \cap C) = \mathbb{R}$</i></p> <p>d) <i>Vraie</i></p> <p>e) <i>fausse, $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme qui est nulle n'est pas irrationnel.</i></p>
<p>Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :</p> <p>(a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$</p> <p>(b) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E</p> <p>(c) La fonction h, définie sur \mathbb{R}, atteint toutes les valeurs de \mathbb{N}</p> <p>(d) Tout réel possède une racine carré dans \mathbb{R}</p> <p>(e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe</p>	<p>1. La proposition se traduit par: $\exists K \in \mathbb{R}, \forall u \in [0, 5] : f(u) = K$</p> <p>2. La proposition se traduit par: $\exists (a, b) \in E^2 / g(a) = g(b) \text{ et } a \neq b$</p> <p>3. La proposition se traduit par: $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \in \mathbb{N}$</p> <p>4. La proposition se traduit par: $\forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} / b = a^2$</p> <p>5. La proposition se traduit par: $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / ab > 0 \text{ ou } bc > 0 \text{ ou } ac > 0$</p>

|| Questions à réponse précise, Partie III ||

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))

Questions	Réponses
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi]$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $ E(x) = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de x	$S = [-4, -3] \cup [3, 4]$
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f , définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x \ln x+1 $	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
Soit la fonction f définie sur $I = [0, 3]$ par	
$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0, 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2, 3] \end{cases}$	$F(x) = \frac{e^{x^2}-1}{2} + \ln \frac{1+x^2}{5}$
Calculer $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ avec $x \in I$	
Calculer $\int t^3 \cos t^2 dt$	$\int t^3 \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} t^2 \sin(t^2) + \frac{1}{2} \cos(t^2) + K$
Déterminer la fonction f telle que $gof(x) = 2 x $ sachant que g est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$f(u) = \begin{cases} \ln(2 u) & u \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[\\ 4u^2-1 & u \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases}$
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$?	$\beta \in [0, 2]$

|| Questions à réponse précise, Partie II ||

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(x^2) = (x^2 + 1) P(x)$	$\mathcal{E} = \left\{ a(x^2 - 1) / a \in \mathbb{R} \right\}$
Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $198x + 216y = 36$	$S = \left\{ (-2 + 12k, 2 - 11k) / k \in \mathbb{Z} \right\}$
E, F et G étant trois ensembles finis exprimer $\text{card}(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles $E, F, G, E \cap F, E \cap G, F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	$\begin{aligned} \text{Card}(E \cup F \cup G) &= \text{Card}(E) + \text{Card}(F) \\ &+ \text{Card}(G) - \text{Card}(E \cap F) - \text{Card}(E \cap G) \\ &- \text{Card}(F \cap G) + \text{Card}(E \cap F \cap G) \end{aligned}$
Exprimer à l'aide d'intervalles de \mathbb{R} l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 4\}$	$A = [2, 4] \cup [-4, -2]$
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples +, -, *, /	$6 \div (1 - 5 \div 7) = 6 \div \frac{2}{7} = 21$
Calculer le nombre complexe $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{20}$	$B = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12} \right]^{24} = \left[2^{12}, 14\pi \right] = 2^{12} = 4096$
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	$\alpha = \frac{2}{15} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right) + \frac{27}{10} \left(1 - \left(\frac{3}{5} \right)^n \right)$
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^n (2k+7)$	$\beta = \sum_{k=1}^n (2k+7) = n(n+8)$
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées : $A(2, 4)$, $B(-2, 1)$ et $C(4, 3)$. On note d la distance du point A à la droite (BC) . Donner la valeur de d .	$\begin{aligned} d &= d(A, (BC)) = \frac{ 2 - 12 + 5 }{\sqrt{10}} \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2}. \end{aligned}$
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$