

Université Moulay Ismaïl  
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

**CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année**

Filière : Sciences Mathématiques A et B

**Epreuve de Mathématiques**

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

**Questions à réponse précise, Partie I**

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (1Pt))	
Questions	Réponses
<p>Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?</p> <p>(a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective</p> <p>(b) <math>\forall x &gt; 1, \frac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}</math></p> <p>(c) Soit <math>A, B</math> et <math>C</math> trois ensembles, on a <math>(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)</math></p> <p>(d) <math>\forall x \in \mathbb{R}, x^2 &lt; 0 \implies x &lt; 0</math></p> <p>(e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel</p>	
<p>Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :</p> <p>(a) La fonction <math>f</math> est constante sur <math>[0, 5]</math></p> <p>(b) La fonction <math>g</math> n'est pas injective sur l'ensemble <math>E</math></p> <p>(c) La fonction <math>h</math>, définie sur <math>\mathbb{R}</math>, atteint toutes les valeurs de <math>\mathbb{N}</math></p> <p>(d) Tout réel possède une racine carré dans <math>\mathbb{R}</math></p> <p>(e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe</p>	

**Questions à réponse précise, Partie II**

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Déterminer l'ensemble des polynômes $P$ tels que $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$	
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $198x + 216y = 36$	
$E, F$ et $G$ étant trois ensembles finis exprimer $\text{card}(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles $E, F, G, E \cap F, E \cap G, F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	
Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq  x  < 4\}$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples $+, -, *$ et $/$	
Calculer le nombre complexe $B = \left( \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} \right)^{20}$	
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^n (2k + 7)$	
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A, B$ et $C$ de coordonnées : $A(2, 4), B(-2, 1)$ et $C(4, 3)$ . On note $d$ la distance du point $A$ à la droite $(BC)$ . Donner la valeur de $d$ .	
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$	

### Questions à réponse précise, Partie III

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Donner l'ensemble $S$ des réels appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ E(x)  = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de $x$	
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe $C_f$ en $+\infty$ de la fonction $f$ , définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x \ln  x+1 $	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$ . Trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$ avec $n > 1$	
Soit la fonction $f$ définie sur $I = [0, 3]$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in ]0, 2[ \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in ]2, 3] \end{cases}$ Calculer $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ avec $x \in I$	
Calculer $\int t^3 \cos t^2 dt$	
Déterminer la fonction $f$ telle que $g \circ f(x) = 2 x $ sachant que $g$ est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ , l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$ ?	

Université Moulay Ismaïl  
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

**CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année**

Filière : Sciences Mathématiques A et B

**Epreuve de Mathématiques**

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

**Questions à réponse précise, Partie I**

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (1Pt))	
Questions	Réponses
<p>Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?</p> <p>(a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective</p> <p>(b) <math>\forall x &gt; 1, \frac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}</math></p> <p>(c) Soit <math>A, B</math> et <math>C</math> trois ensembles, on a <math>(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)</math></p> <p>(d) <math>\forall x \in \mathbb{R}, x^2 &lt; 0 \implies x &lt; 0</math></p> <p>(e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel</p>	<p>a) fausse. exp: <math>\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_x</math> est injective mais pas bijective, 0 n'a pas d'antécédant dans <math>\mathbb{R}</math>.</p> <p>b) fausse. <math>D_{\frac{x-1}{\ln(x-1)}} = ]1, 2[ \cup ]2, +\infty[</math></p> <p>c) fausse. <math>A=B=\mathbb{R}, C=\mathbb{R}^+</math> <math>(A \cup B) \cap C = \mathbb{R}^+ \quad A \cup (B \cap C) = \mathbb{R}</math></p> <p>d) vraie</p> <p>e) fausse, <math>\sqrt{2}, -\sqrt{2}</math> sont irrationnels mais leur somme qui est nulle n'est pas irrationnel.</p>
<p>Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes :</p> <p>(a) La fonction <math>f</math> est constante sur <math>[0, 5]</math></p> <p>(b) La fonction <math>g</math> n'est pas injective sur l'ensemble <math>E</math></p> <p>(c) La fonction <math>h</math>, définie sur <math>\mathbb{R}</math>, atteint toutes les valeurs de <math>\mathbb{N}</math></p> <p>(d) Tout réel possède une racine carré dans <math>\mathbb{R}</math></p> <p>(e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe</p>	<p>1. La proposition se traduit par: <math>\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in [0, 5] : f(x) = K</math></p> <p>2. La proposition se traduit par: <math>\exists (a, b) \in E^2 / g(a) = g(b) \text{ et } a \neq b</math></p> <p>3. La proposition se traduit par: <math>\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \in \mathbb{N}</math></p> <p>4. La proposition se traduit par: <math>\forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} / b = a^2</math></p> <p>5. La proposition se traduit par: <math>\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / ab \geq 0 \text{ ou } bc \geq 0 \text{ ou } ac \geq 0</math></p>



### Questions à réponse précise, Partie III

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Donner l'ensemble $S$ des réels appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $ E(x)  = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de $x$	$S = ]-4, -3] \cup [3, 4[$
Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe $C_f$ en $+\infty$ de la fonction $f$ , définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x \ln x+1 $	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ , l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$ . Trouver une relation entre $I_n$ et $I_{n-1}$ avec $n > 1$	$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
Soit la fonction $f$ définie sur $I = [0, 3]$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ x e^{x^2} & \text{si } x \in ]0, 2[ \\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in ]2, 3] \end{cases}$ Calculer $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ avec $x \in I$	$F(x) = \frac{e^{x^2}-1}{2} + \ln \frac{1+x^2}{5}$
Calculer $\int t^3 \cos t^2 dt$	$\int t^3 \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} t^2 \sin(t^2) + \frac{1}{2} \cos(t^2) + K$
Déterminer la fonction $f$ telle que $g \circ f(x) = 2 x $ sachant que $g$ est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \ln(2 x ) & x \in ]-\frac{1}{2}, 0[ \cup ]0, \frac{1}{2}[ \\ 4x^2-1 & x \in ]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[ \end{cases}$
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ , l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$ ?	$\beta \in [0, 2]$

# Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	Réponses
Déterminer l'ensemble des polynômes $P$ tels que $P(x^2) = (x^2 + 1)P(x)$	$\mathcal{E} = \{a(x^2 - 1) / a \in \mathbb{R}\}$
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $198x + 216y = 36$	$S = \{(-2 + 12K, 2 - 11K) / K \in \mathbb{Z}\}$
$E, F$ et $G$ étant trois ensembles finis exprimer $\text{card}(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles $E, F, G, E \cap F, E \cap G, F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	$\text{Card}(E \cup F \cup G) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) + \text{Card}(G) - \text{Card}(E \cap F) - \text{Card}(E \cap G) - \text{Card}(F \cap G) + \text{Card}(E \cap F \cap G)$
Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq  x  < 4\}$	$A = [2, 4] \cup [-4, -2]$
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples $+, -, *, /$	$6 \div (1 - 5 \div 7) = 6 \div \frac{2}{7} = 21$
Calculer le nombre complexe $B = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$	$B = [12, \frac{7\pi}{12}]^{24} = [2^{12}, 14\pi] = 2^{12} = 4096$
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	$\alpha = \frac{2}{15} \left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{27}{10} \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^n (2k + 7)$	$\beta = \sum_{k=1}^n (2k + 7) = n(n + 8)$
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A, B$ et $C$ de coordonnées : $A(2, 4), B(-2, 1)$ et $C(4, 3)$ . On note $d$ la distance du point $A$ à la droite $(BC)$ . Donner la valeur de $d$ .	$d = d(A, (BC)) = \frac{ 2 - 12 + 5 }{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1 = \sqrt{2}, u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$