

**Épreuve de Mathématique**

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

**I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES**

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse ou une réponse fausse = 0pt

	Réponses	Notes	
Q1 2pt	Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}}$	$\lim_n u_n =$	
Q2 2pt	Déterminer, dans $[0, 2\pi]^2$ , l'ensemble $S$ des solutions du système: $\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$	$S =$	
Q3 2pt	Déterminer la forme algébrique de: $z = \left( \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^{42}$	$z =$	
Q4 2pt	Déterminer, $\Gamma$ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes $z$ vérifient: $(iz + 1)(z + i - 1) \in i\mathbb{R}$	$\Gamma$ est .....	
Q5 2pt	Soit $a \in ]0, \pi[$ . Calculer $D = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$	$D =$	
Q6 2pt	Calculer: $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	$A_n =$	
Q7 2pt	Calculer $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left( 1 + 2 + 3 + \dots + E\left(\frac{1}{ x }\right) \right)$	$\ell =$	
Q8 2pt	Évaluer la limite $f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}{x}$	$f =$	
Q9 2pt	Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telles que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y)$	$f(x) =$	
Q10 2pt	Soit $g$ la fonction définie par $\forall x \in ]0, \pi[ \quad g(x) =  \cos x  \sqrt{1 - \cos x}$	$g'(x) = \dots$	
Q11 2pt	Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$ , $\forall x \in ]0, \pi[ \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$		
Q11 2pt	Soit $h$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \ln e^x - e^{2x} $ Déterminer $h^{-1}$ .	$\forall x \in D_{h^{-1}} = \dots$ $h^{-1}(x) = \dots$	
Q12 2pt	Calculer $K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x^2} dx$	$K =$	
Q13 2pt	Calculer l'intégrale $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}} dx$	$L =$	
Q14 2pt	Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(t) dt = 0, y'(\pi) = \frac{6}{37}$	$y(x) =$	
Q15 2pt	Résoudre, dans $\mathbb{N}^2$ , l'équation $x^2 - y^2 = 404$	$S =$	

**II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES**

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.

Q16: Pour quelles valeurs de  $m$  la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2m \\ 1 & -m+1 & 1 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$  est inversible:

- |                         |               |                         |                     |
|-------------------------|---------------|-------------------------|---------------------|
| A                       | B             | C                       | D                   |
| -1 et un nombre négatif | uniquement -1 | -1 et un nombre positif | -1 et $\frac{1}{2}$ |

Notes

Q17: Sur  $[0, +\infty]$ , la fonction  $f$  définie par  $f(x) = |x| + \ln(x+1)$  est:

- |                   |                                      |                        |                            |
|-------------------|--------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| A                 | B                                    | C                      | D                          |
| toujours positive | positive puis négative puis positive | négative puis positive | aucunes des trois réponses |

Q18: Soit  $f$  définie par  $f(0) = \frac{1}{e}$ ,  $f(e) = 0$  et  $f(x) = e^{\frac{1+\ln x}{1-\ln x}}$ . Alors sa courbe  $G_f$  admet:

- |                                    |                                       |   |                            |
|------------------------------------|---------------------------------------|---|----------------------------|
| A                                  | B                                     | C   | D                          |
| une asymptote oblique en $+\infty$ | en $x = e$ une demi tangente à gauche | en $x = e$ une demi tangente à droite verticale | aucunes des trois réponses |

Q19: Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom "SMARA" dans un ordre quelconque?

- |                  |                   |                   |                            |
|------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|
| A                | B                 | C                 | D                          |
| $\frac{1}{6006}$ | $\frac{10}{1001}$ | $\frac{50}{14^5}$ | aucunes des trois réponses |

Q20: Une boîte  $B_1$  contient 2 jetons numérotés: 1, 3. Une boîte  $B_2$  contient 2 jetons numérotés: 2, 2. Une boîte  $B_3$  contient 2 jetons numérotés: 1, 0. On tire au hasard un jeton  $a$  de  $B_1$ , un jeton  $b$  de  $B_2$ , un jeton  $c$  de  $B_3$ . Quelle est la probabilité pour que l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet des racines réelles?

- |     |      |      |   |
|-----|------|------|---|
| A   | B    | C    | D |
| 0,5 | 0,25 | 0,75 | 1 |

Q21: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points  $A(-1, 1, 1)$  et  $B(7, -5, 5)$ . Soit  $S$  la sphère dont l'un des diamètres est le segment  $[AB]$ . Le plan tangent à  $S$  au point  $C(1, 1, -1)$  est:

- |                        |                        |                       |                        |
|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| A                      | B                      | C                     | D                      |
| $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ | $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ | $2x + 2y - z - 5 = 0$ | $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ |

Q22: Soit  $(u_n)_n$  la suite de terme général  $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ . Alors

- |  |  |  |                            |
|--|--|--|----------------------------|
| A  | B  | C  | D                          |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = +\infty$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 1$ | aucunes des trois réponses |

Q23: Soit  $E$  l'espace vectoriel défini par:  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x + y = 0\}$ . Quelle est la dimension de  $E$ ?

- |   |   |   |                            |
|---|---|---|----------------------------|
| A | B | C | D                          |
| 1 | 2 | 3 | aucunes des trois réponses |

Q24: Combien l'équation  $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$  possède-t-elle de solutions dans  $[0, \frac{2\pi}{3}]$ ?

- |                |               |                |                         |
|----------------|---------------|----------------|-------------------------|
| A              | B             | C              | D                       |
| Cinq solutions | Six solutions | Sept solutions | Plus que sept solutions |

Q25:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right)$$

- |   |   |           |                           |
|---|---|-----------|---------------------------|
| A | B | C         | D                         |
| 0 | 1 | $+\infty$ | cette limite n'existe pas |

## Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

## I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse ou une réponse fausse = 0pt

	Questions	Réponses	Notes
Q1 2pt	Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4 + 2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4 + n}}$	$\lim_n u_n = 1$	
Q2 2pt	Déterminer, dans $[0,2\pi]^2$ , l'ensemble $S$ des solutions du système: $\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$	$S = \left( \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \right) \text{ et } \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$	
Q3 2pt	Déterminer la forme algébrique de: $z = \left( \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^{42}$	$z = -1$	
Q4 2pt	Déterminer, $\Gamma$ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes $z$ vérifient: $(iz + 1)(z + i - 1) \in i\mathbb{R}$	$\Gamma$ est ....	
Q5 2pt	Soit $a \in ]0, \pi[$ . Calculer $D = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$	$D = \frac{\sin a}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$	
Q6 2pt	Calculer: $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	$A_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$	
Q7 2pt	Calculer $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left( 1 + 2 + 3 + \dots + E\left(\frac{1}{ x }\right) \right)$	$\ell = \frac{1}{2}$	
Q8 2pt	Évaluer la limite $j = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}}{x}$	$j = \frac{1}{12}$	
Q9 2pt	Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telles que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y)$	$f(x) =$	
Q10 2pt	Soit $g$ la fonction définie par $\forall x \in ]0, \pi[ \quad g(x) =  \cos x  \sqrt{1 - \cos x}$	$g'(x) = \dots$	
Q11 2pt	Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$ , $\forall x \in ]0, \pi[ \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$		
Q11 2pt	Soit $h$ définie sur $\mathbb{R}_+$ par $h(x) = \ln e^x - e^{2x} $ . Déterminer $h^{-1}$ .	$\forall x \in D_{h^{-1}} = \dots$ , $h^{-1}(x) = \dots$	
Q12 2pt	Calculer $K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$	$K =$	
Q13 2pt	Calculer l'intégrale $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x + \sqrt{\cos x}}} dx$	$L = \frac{\pi}{4}$	
Q14 2pt	Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(t) dt = 0, y'(\pi) = \frac{6}{37}$	$y(x) = (K_1 \cos 3x + K_2 \sin 3x) e^{-x} + \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{36} \cos 3x$	
Q15 2pt	Résoudre, dans $\mathbb{N}^2$ , l'équation $x^2 - y^2 = 404$	$S = (54, 56), (102, 100), (203, 201)$	

## II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.

Q16: Pour quelles valeurs de  $m$  la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2m \\ 1 & -m+1 & 1 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$  est inversible:

- |                         |               |                         |                     |
|-------------------------|---------------|-------------------------|---------------------|
| A                       | B             | C                       | D                   |
| -1 et un nombre négatif | uniquement -1 | -1 et un nombre positif | -1 et $\frac{1}{2}$ |

Notes

Q17: Sur  $[0, +\infty]$ , la fonction  $f$  définie par  $f(x) = |x| + \ln(x+1)$  est:

- |                   |                                      |                        |                            |
|-------------------|--------------------------------------|------------------------|----------------------------|
| A                 | B                                    | C                      | D                          |
| toujours positive | positive puis négative puis positive | négative puis positive | aucunes des trois réponses |

Q18: Soit  $f$  définie par  $f(0) = \frac{1}{e}$ ,  $f(e) = 0$  et  $f(x) = e^{\frac{1-\ln x}{1-\ln x}}$ . Alors sa courbe  $C_f$  admet:

- |                                    |                                       |   |                            |
|------------------------------------|---------------------------------------|---|----------------------------|
| A                                  | B                                     | C   | D                          |
| une asymptote oblique en $+\infty$ | en $x = e$ une demi tangente à gauche | en $x = e$ une demi tangente à droite verticale | aucunes des trois réponses |

Q19: Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom "SMARA" dans un ordre quelconque?

- |                  |                   |                  |                            |
|------------------|-------------------|------------------|----------------------------|
| A                | B                 | C                | D                          |
| $\frac{1}{6006}$ | $\frac{10}{1001}$ | $\frac{50}{145}$ | aucunes des trois réponses |

Q20: Une boîte  $B_1$  contient 2 jetons numérotés: 1, 3. Une boîte  $B_2$  contient 2 jetons numérotés: 2, 2. Une boîte  $B_3$  contient 2 jetons numérotés: 1, 0. On tire au hasard un jeton  $a$  de  $B_1$ , un jeton  $b$  de  $B_2$ , un jeton  $c$  de  $B_3$ . Quelle est la probabilité pour que l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet des racines réelles?

- |     |      |      |   |
|-----|------|------|---|
| A   | B    | C    | D |
| 0,5 | 0,25 | 0,75 | 1 |

Q21: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points  $A(-1, 1, 1)$  et  $B(7, -5, 5)$ . Soit  $S$  la sphère dont l'un des diamètres est le segment  $[AB]$ . Le plan tangent à  $S$  au point  $C(1, 1, -1)$  est:

- |                        |                        |                       |                        |
|------------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|
| A                      | B                      | C                     | D                      |
| $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ | $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ | $2x + 2y - z - 5 = 0$ | $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ |

Q22: Soit  $(u_n)_n$  la suite de terme général  $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$ . Alors

- |  |  |  |                            |
|--|--|--|----------------------------|
| A  | B  | C  | D                          |
| $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = +\infty$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$ | $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 1$ | aucunes des trois réponses |

Q23: Soit  $E$  l'espace vectoriel défini par:  $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t=0 \text{ et } 2x+y=0\}$ . Quelle est la dimension de  $E$ ?

- |   |   |   |                            |
|---|---|---|----------------------------|
| A | B | C | D                          |
| 1 | 2 | 3 | aucunes des trois réponses |

Q24: Combien l'équation  $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$  possède-t-elle de solutions dans  $[0, \frac{2\pi}{3}]$ ?

- |                |               |                |                         |
|----------------|---------------|----------------|-------------------------|
| A              | B             | C              | D                       |
| Cinq solutions | Six solutions | Sept solutions | Plus que sept solutions |

Q25:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right)$$

- |   |   |           |                           |
|---|---|-----------|---------------------------|
| A | B | C         | D                         |
| 0 | 1 | $+\infty$ | cette limite n'existe pas |