

Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse ou une réponse fautive = 0pt

	Questions	Réponses	Notes
Q1 2pt	Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$	$\lim_n u_n =$	
Q2 2pt	Déterminer, dans $[0, 2\pi]^2$, l'ensemble S des solutions du système: $\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$	$S =$	
Q3 2pt	Déterminer la forme algébrique de: $z = \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} - i \sqrt{2 + \sqrt{3}} \right)^{42}$	$z =$	
Q4 2pt	Déterminer, Γ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes z vérifient: $(iz + 1)(z + i - 1) \in i\mathbb{R}$	Γ est	
Q5 2pt	Soit $a \in]0, \pi[$. Calculer $D = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$	$D =$	
Q6 2pt	Calculer: $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	$A_n =$	
Q7 2pt	Calculer $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + E\left(\frac{1}{ x }\right) \right)$	$\ell =$	
Q8 2pt	Évaluer la limite $j = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$	$j =$	
Q9 2pt	Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telles que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y)$	$f(x) =$	
Q10 2pt	Soit g la fonction définie par $\forall x \in]0, \pi[\quad g(x) = \cos x \sqrt{1 - \cos x}$ Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$, $\forall x \in]0, \pi[\setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$	$g'(x) = \dots$	
Q11 2pt	Soit h définie sur \mathbb{R}^+ par $h(x) = \ln e^x - e^{2x} $ Déterminer h^{-1} .	$\forall x \in D_{h^{-1}} = \dots, \dots$ $h^{-1}(x) = \dots$	
Q12 2pt	Calculer $K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{\text{Arctan}(x)}{x^2} dx$	$K =$	
Q13 2pt	calculer l'intégrale $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$	$L =$	
Q14 2pt	Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y(t) dt = 0, y'(\pi) = \frac{6}{37}$	$y(x) =$	
Q15 2pt	Résoudre, dans \mathbb{N}^2 , l'équation $x^2 - y^2 = 404$	$S =$	

II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.

Q16: Pour quelles valeurs de m la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2m \\ 1 & -m+1 & 1 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$ est inversible:

- A ☐ -1 et un nombre négatif B ☐ uniquement -1 C ☐ -1 et un nombre positif D ☐ -1 et $1/2$

Q17: Sur $[0, +\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = |x| + \ln(x+1)$ est:

- A ☐ toujours positive B ☐ positive puis négative puis positive C ☐ négative puis positive D ☐ aucunes des trois réponses

Q18: Soit f définie par $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(e) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{1+\ln x}{1-\ln x}}$. Alors sa courbe C_f admet:

- A ☐ une asymptote oblique en $+\infty$ B ☐ en $x = e$ une demi tangente à gauche C ☐ en $x = e$ une demi tangente à droite verticale D ☐ aucunes des trois réponses

Q19: Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom "SMARA" dans un ordre quelconque?

- A ☐ $\frac{1}{6006}$ B ☐ $\frac{10}{1001}$ C ☐ $\frac{50}{14^5}$ D ☐ aucunes des trois réponses

Q20: Une boîte B_1 contient 2 jetons numérotés: 1, 3. Une boîte B_2 contient 2 jetons numérotés: 2, 2. Une boîte B_3 contient 2 jetons numérotés: 1, 0. On tire au hasard un jeton a de B_1 , un jeton b de B_2 , un jeton c de B_3 . Quelle est la probabilité pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles?

- A ☐ 0,5 B ☐ 0,25 C ☐ 0,75 D ☐ 1

Q21: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-1,1,1)$ et $B(7,-5,5)$. Soit S la sphère dont l'un des diamètre est le segment $[AB]$. Le plan tangent à S au point $C(1,1,-1)$ est:

- A ☐ $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ B ☐ $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ C ☐ $2x + 2y - z - 5 = 0$ D ☐ $4x + 2y + 2z - 5 = 0$

Q22: Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$. Alors

- A ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = +\infty$ B ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$ C ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 1$ D ☐ aucunes des trois réponses

Q23: Soit E l'espace vectoriel défini par: $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x + y = 0\}$. Quelle est la dimension de E ?

- A ☐ 1 B ☐ 2 C ☐ 3 D ☐ aucunes des trois réponses

Q24: Combien l'équation $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$ possède-t-elle de solutions dans $[0, \frac{2\pi}{3}]$?

- A ☐ Cinq solutions B ☐ Six solutions C ☐ Sept solutions D ☐ Plus que sept solutions

Q25:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right)$$

- A ☐ 0 B ☐ 1 C ☐ $+\infty$ D ☐ cette limite n'existe pas

Épreuve de Mathématique

Samedi 02 Août 2014- Durée 2h00

I - QUESTIONS À RÉPONSES PRÉCISES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse ou une réponse fausse = 0pt

	Questions	Réponses	Notes
Q1 2pt	Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie par: $u_n = \frac{n}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{n}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}}$	$\lim_n u_n = 1$	
Q2 2pt	Déterminer, dans $[0, 2\pi]^2$, l'ensemble S des solutions du système: $\begin{cases} \sqrt{2} \cos x - \cos x \cos y = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos y = \sqrt{2} \end{cases}$	$S = \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right) \text{ et } \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$	
Q3 2pt	Déterminer la forme algébrique de: $z = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{42}$	$z = -1$	
Q4 2pt	Déterminer, Γ , l'ensemble des points du plan complexe dont les affixes z vérifient: $(iz+1)(z+i-1) \in i\mathbb{R}$	Γ est ... $\frac{1}{1-2x}$	
Q5 2pt	Soit $a \in]0, \pi[$. Calculer $D = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$	$D = \frac{\sin a}{2^n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right)}$	
Q6 2pt	Calculer: $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$	$A_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$	
Q7 2pt	Calculer $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(1 + 2 + 3 + \dots + E\left(\frac{1}{ x }\right)\right)$	$\ell = \frac{1}{2}$	
Q8 2pt	Évaluer la limite $j = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x}$	$j = \frac{1}{12}$	
Q9 2pt	Trouver toutes les applications $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telles que: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}, f(x^2 + y) = x^3 f(x) + f(y)$	$f(x) =$	
Q10 2pt	Soit g la fonction définie par $\forall x \in]0, \pi[\quad g(x) = \cos x \sqrt{1 - \cos x}$ Calculer $g'(x)$ en fonction $g(x)$, $\forall x \in]0, \pi[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$g'(x) = \dots$	
Q11 2pt	Soit h définie sur \mathbb{R}^+ par $h(x) = \ln e^x - e^{2x} $ Déterminer h^{-1} .	$\forall x \in D_{h^{-1}} = \dots$ $h^{-1}(x) = \dots$	
Q12 2pt	Calculer $K = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a^1 \frac{\arctan(x)}{x^2} dx$	$K =$	
Q13 2pt	calculer l'intégrale $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$	$L = \frac{\pi}{4}$	
Q14 2pt	Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 10y = \sin 3x, \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} y(t) dt = 0, y'(\pi) = \frac{6}{37}$	$y(x) = K_1 \cos 3x + K_2 \sin 3x e^{-x} + \frac{1}{6} \sin 3x + \frac{1}{36} \cos 3x$	
Q15 2pt	Résoudre, dans \mathbb{N}^2 , l'équation $x^2 - y^2 = 404$	$S = (54, 50); (102, 100); (203, 201)$	

II - QUESTIONS À CHOIX MULTIPLES

Une réponse correcte = 2pt, pas de réponse = 0pt, plus d'une réponse ou une réponse fausse = -1pt.

Q16: Pour quelles valeurs de m la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2m \\ 1 & -m+1 & 1 \\ 2 & 3 & m \end{pmatrix}$ est inversible:

- A ☐ -1 et un nombre négatif B ☐ uniquement -1 C ☒ -1 et un nombre positif D ☐ -1 et $1/2$

Q17: Sur $[0, +\infty[$, la fonction f définie par $f(x) = |x| + \ln(x+1)$ est:

- A ☒ toujours positive B ☐ positive puis négative puis positive C ☐ négative puis positive D ☐ aucunes des trois réponses

Q18: Soit f définie par $f(0) = \frac{1}{e}$, $f(e) = 0$ et $f(x) = e^{\frac{1+\ln x}{x-\ln x}}$. Alors sa courbe C_f admet:

- A ☐ une asymptote oblique en $+\infty$ B ☐ en $x = e$ une demi tangente à gauche C ☒ en $x = e$ une demi tangente à droite verticale D ☐ aucunes des trois réponses

Q19: Dans une boîte se trouvent 14 jetons portant chacun une lettre du nom "SAHARA MAROCAIN". On tire successivement et sans remise 5 jetons. Quelle est la probabilité pour que l'on tire les lettres du nom "SMARA" dans un ordre quelconque?

- A ☐ $\frac{1}{6006}$ B ☒ $\frac{10}{1001}$ C ☐ $\frac{50}{14^5}$ D ☐ aucunes des trois réponses

Q20: Une boîte B_1 contient 2 jetons numérotés: 1, 3. Une boîte B_2 contient 2 jetons numérotés: 2, 2. Une boîte B_3 contient 2 jetons numérotés: 1, 0. On tire au hasard un jeton a de B_1 , un jeton b de B_2 , un jeton c de B_3 . Quelle est la probabilité pour que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des racines réelles?

- A ☐ 0,5 B ☐ 0,25 C ☒ 0,75 D ☐ 1

Q21: Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $A(-1,1,1)$ et $B(7,-5,5)$. Soit S la sphère dont l'un des diamètre est le segment $[AB]$. Le plan tangent à S au point $C(1,1,-1)$ est:

- A ☒ $2x - 3y + 4z + 5 = 0$ B ☐ $4x + 3y + 2z - 5 = 0$ C ☐ $2x + 2y - z - 5 = 0$ D ☐ $4x + 2y + 2z - 5 = 0$

Q22: Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x} dx$. Alors

- A ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = +\infty$ B ☒ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 0$ C ☐ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{e^n} = 1$ D ☐ aucunes des trois réponses

Q23: Soit E l'espace vectoriel défini par: $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x + y = 0\}$. Quelle est la dimension de E ?

- A ☐ 1 B ☐ 2 C ☒ 3 D ☐ aucunes des trois réponses

Q24: Combien l'équation $\tan x + \tan 2x + \tan 3x + \tan 4x = 0$ possède-t-elle de solutions dans $[0, \frac{2\pi}{3}]$?

- A ☐ Cinq solutions B ☐ Six solutions C ☐ Sept solutions D ☒ Plus que sept solutions

Q25:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \pi}{2^n - 1}\right)$$

- A ☐ 0 B ☒ 1 C ☐ $+\infty$ D ☐ cette limite n'existe pas